Oblig 2 - MAT1120

Fredrik Meyer

26. oktober 2009

Matrisene A_i er definert slik der P er en rotasjonsmatrise som definerer i oppgave 2:

$$\begin{aligned} A_1 &= A \\ A_2 &= P_1^{-1} A_1 P_1 \\ &\vdots \\ A_{k+1} &= P_k^{-1} A_k P_k \end{aligned}$$

Oppgave 1

Matrisene A_{i+1} og A_i er similære (det finnes en inverterbar matrise P slik at $A_{i+1} = P^{-1} A_i P$. Fra "Theorem 4" side 331 i Lay, følger det at de har de samme egenverdiene. Det følger induktivt at alle matrisene på denne formen har de samme egenverdiene.

Vi skal nå finne et uttrykk for egenvektorene til A_{k+1} ved hjelp av egenvektorene til A_k. Anta at v_k er en egenvektor til A_k. Da har vi at $A_k v_k = \lambda v_k$. Vi ganger begge sider med P_k^{-1} fra venstre, og får at $P_k^{-1} A_k v_k = \lambda P_k^{-1} v_k$. Husk nå at $P_k^{-1} A_k = A_{k+1} P_k^{-1}$, så vi får at $A_{k+1} P_k^{-1} v_k = P_k^{-1} v_k$. Det følger at egenvektoren til A_{k+1} er gitt ved $P_k^{-1} v_k$ der v_k er egenvektoren til A_k. Ved induksjon gir dette at egenvektoren til A_k er gitt ved $P_{k-1}^{-1} P_{k-2}^{-1} \cdots P_1^{-1} v$ der v er en egenvektor til A.

Oppgave 2

Vi definerer P_k som nxn-matrisen slik at $(P_k)_{rr} = (P_k)_{ss} = \cos\theta$, $(P_k)_{rs} = -(P_k)_{sr} = \sin\theta$, $(P_k)_{ii} = 1$ (for $i \neq r, s$) og 0 ellers. Vi skal vise at P er ortogonal, altså at $PP^T = I$. Dette kan gjøres ved å skrive P som en matrise med radvektorer, og P^T som en matrise med kolonnevektorer, for så å gange disse sammen, og se hva vi får. Vi skriver

$$P = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ w_1 \\ \vdots \\ w_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Hvor u_i er enhetsvektorene, og $w_1 = (0, \cdots, \cos\theta, \cdots, \sin\theta, \cdots, 0)$, med de trigonometriske funksjonene "der de skal være". På samme måte skriver vi

$$P^T = \begin{pmatrix} u_1^T & \cdots & v_1^T & \cdots & v_2^T & \cdots & u_n^T \end{pmatrix}$$

Vi ganger disse sammen:

$$PP^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ w_1 \\ \vdots \\ w_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^T & \cdots & v_1^T & \cdots & v_2^T & \cdots & u_n^T \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & \cdots & u_1 \cdot v_1 & \cdots & u_1 \cdot v_2 & \cdots & u_1 \cdot u_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_1 \cdot u_1 & \cdots & w_1 \cdot v_1 & \cdots & w_1 \cdot v_2 & \cdots & w_1 \cdot u_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_1 \cdot u_1 & \cdots & w_2 \cdot v_1 & \cdots & w_2 \cdot v_2 & \cdots & w_2 \cdot u_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n \cdot u_1 & \cdots & u_n \cdot v_1 & \cdots & u_n \cdot v_2 & \cdots & u_n \cdot u_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

Ved å undersøke alle disse prikkproduktene, ser vi at alle de på diagonalen blir én, og alle andre forsvinner. Spesielt er

$$w_2 \cdot v_1 = (0, \cdots, -\sin\theta, \cdots, \cos\theta, \cdots, 0) \cdot (0, \cdots, \cos\theta, \cdots, \sin\theta, \cdots, 0) =$$

$$0 + \cdots + -\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta = 0$$

De andre utregningene foregår på tilsvarende vis.

Oppgave 3

P_k kalles ofte en rotasjonmatrise fordi den roterer et plan med en vinkel θ. Dette kan eksemplifiseres ved formelen $\phi = \arccos(\frac{a \cdot b}{|a||b|})$ som gir oss vinkelen mellom to vektorer. Tester vi dette på en av de "rammede" vektorene i transformasjonen $x \to Px$, ser vi at (u_r er enhetsvektor nr r, og w_r er kolonne r i rotasjonsmatrisen)

$$\phi = \arccos(\frac{u_r \cdot w_r}{|u_r||w_r|}) = \theta$$

Siden lengder bevares og ingen av de andre enhetsvektorene endres, kan vi konkludere med at denne matrisen "roterer et underrom av $\mathbb{R}^n$".

Oppgave 4

Laget funksjonen i MATLAB, og resultatet er som følger:

```
function P=transmatr(r,s,theta,n)
    P = eye(n);
    P(r,r)=cos(theta);
    P(s,s)=cos(theta);
    P(r,s)=sin(theta);
    P(s,r)=-sin(theta);
```

Funksjonen tar posisjonen (r,s), vinkelen θ og dimensjonen n som argumenter, og returnerer matrisen definert i oppgave 2.

Oppgave 5

Vi definerer

$$||A||_F = \sqrt{\sum_{i \neq j}^{n} A_{ij}^2}$$

Og ønsker å lage en funksjon som tar en reell $n \times n$-matrise og retunrerer $||A||_F$. Det er fort gjort, og MATLAB-funksjonen er gjengitt under:

```
function fbo=frobnormoff(A)
    s = 0;
    [m,n]= size(A);
    for k=1:n % tar prikkproduktet av hver rad og summerer
        s = s + A(k,:)*A(k,:)';
    end
    s = s - diag(A)'*diag(A); % trekker fra diagonalen
    fbo = sqrt(s); % returnerer svaret
```

Oppgave 6

Vi skal lage en MATLAB-funksjon som returnerer posisjonen til det elementet i en matrise utenfor diagonalen med størst absoluttverdi. Det er fort gjort, og MATLAB-programmet er gjengitt under:

```
function [r,s]=offabsmaks(A)
    [m,n] = size(A);
    r =1; s =r;
```

```
sistestore = 0;
for i=1:n
    for j=1:n
        if i~=j
            if abs(A(i,j)) >= sistestore
                sistestore = abs(A(i,j));
                r = i; s = j;
            end
        end
    end
end
```

Oppgave 7

Vi definerer $B = P^T AP$. Vi skal første vise at B er symmetrisk når A er det. Altså at $B^T = B$. La oss beregne B^T:

$$B^T = (P^T AP)^T = P^T (P^T A)^T = P^T A^T P = P^T AP$$

Hvor vi i siste likhet benyttet oss av at A også er symmetrisk. Nå skal vi vise følgende likhet:

$$B_{rs} = B_{sr} = \sin\theta\cos\theta(A_{rr} - A_{ss}) + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)A_{rs}$$

Det første likhetstegnet følger av at B er symmetrisk. Resten er ren regning. En hjelpsom observasjon er at hvis $C = AB$, så er $C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Dette er egentlig definisjonen på multiplikasjon av matriser.

$$\begin{aligned}
B_{ij} = (P^T AP)_{ij} &= \sum_{m=1}^{n}\left(p_{mi}\sum_{k=1}^{n} a_{mk}p_{kj}\right) \\
B_{rs} &= \sum_{m=1}^{n}\left(p_{mi}\sum_{k=1}^{n} a_{mk}p_{kj}\right) \\
&= \sum_{m=1}^{n}\left[p_{mr}\left(\sin\theta a_{mr} + \cos\theta a_{ms}\right)\right] \\
&= \sin\theta\sum_{m=1}^{n} p_{mr}a_{mr} + \cos\theta\sum_{m=1}^{n} p_{mr}a_{ms} \\
&= \sin\theta(\cos\theta a_{rr} - \sin\theta a_{sr}) + \cos\theta(\cos\theta a_{rs} - \sin\theta a_{ss}) \\
&= \sin\theta\cos\theta(a_{rr} - a_{ss}) + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)a_{rs}
\end{aligned}$$

Som var det vi skulle vise. Dette er lange kjedelige utregninger hvor vi må passe på hele tiden hvordan P er definert.

Oppgave 8

Vi får opplyst at

$$\sum_{i\neq j,(i,j)\neq(r,s),(s,r)} (A_{ij})^2 = \sum_{i\neq j,(i,j)\neq(r,s),(s,r)} (B_{ij})^2$$

Fra dette følger det at

$$\begin{aligned} ||B||_F &= 2B_{rs}^2 + \sum_{i \neq j, (i,j) \neq (r,s),(s,r)} (B_{ij})^2 \\ &= 2B_{rs}^2 + \sum_{i \neq j, (i,j) \neq (r,s),(s,r)} (A_{ij})^2 \\ &= 2B_{rs}^2 + ||A||_F - 2A_{rs}^2 \end{aligned}$$

Velger vi nå (r,s) slik at $|A_{rs}|$ er størst mulig, og samtidig får ligningen $sin\theta cos\theta(A_{rr} - A_{ss}) + (cos^2\theta - \sin^2\theta)A_{rs} = 0$ til å gå opp, ser vi at: 1) $B_{rs} = 0$. og 2) $||B||_F = ||A||_F - 2A_{rs}^2$. Dermed har vi fått $||B||_F$ minst mulig.

Oppgave 9

Dette er enkel regning og bruk av trigonometriske identiteter:

$$\begin{aligned} 0 &= \sin\theta\cos\theta(A_{rr} - A_{ss}) + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)A_{rs} \\ &= \frac{1}{2}\sin(2\theta)(A_{rr} - A_{ss}) + (\cos(2\theta)A_{rs} \end{aligned}$$

Vi deler på $\cos(2\theta)$ på begge sider:

$$\frac{1}{2}\tan(2\theta)(A_{rr} - A_{ss}) + A_{rs} = 0$$

Omstokking gir

$$\tan(2\theta) = \frac{2A_{rs}}{A_{ss} - Arr}$$

Oppgave 10

Vi skal studere følgende kode:

```
function [P,D]=jacobi(A)
  toleranse=10^(-4);
  n=size(A,1); % størrelsen på matrisen
  P=eye(n);    % lager en enhetsmatrise
  while frobnormoff(A)>toleranse  % så lenge normen er større enn toleransen
                                  % fortsetter algoritmen
    theta=atan( 2*A(r,s)/(A(s,s)-A(r,r)) )/2;  % løser ligningen fra forrige oppgave
    Ptheta=transmatr(r,s,theta,n);
    A=inv(Ptheta)*A*Ptheta;
    P=P*Ptheta;
  end
  D=A;
```

Kort forklart: Det funksjonen gjør er å ta inn en symmetrisk matrise A, og så gjøre denne "mer" diagonal ved å fjerne store elementer utenfor diagonalen samtidig som egenverdiene bevares. Dette er forklart tidligere. Den fortsetter å finne matriser P_i helt til absoluttnormen er under en viss toleranse, og den returnerer da to matriser. Den ene er en diagonalmatrise D bestående av egenverdier til A, og den andre er en matrise P bestående av egenvektorer til A.