

# Bevis for sum av kvadrater

Fredrik Meyer

19. oktober 2009

## Sammendrag

Matematikk blir alltid mer opplysende om man bruker geometrisk intuisjon når man skal bevise påstander som tilsynelatende kun har med tall å gjøre.

## Bevis

Påstanden vi skal bevise er følgende:

$$S = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6} \quad (1)$$

La oss først tenke på *hva* det er vi skal bevise. Det er en sum av kvadrater. Og hva er kvadrater? Jo - det er geometriske objekter. La oss tegne hva det er vi snakker om:

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

Det vi skal gjøre, er å finne et uttrykk for antall prikker. Ser vi et mønster her? Om vi ser på de nederste linjene først, og summerer oppover, ser vi at

$$S = (1 + 2 + \dots + n) + \dots + (k + \dots + n) + \dots + n \quad (2)$$

Vi legger merke til at alt dette bare er summer fra en aritmetisk rekke, og vi vet at

$$k + (k+1) + \dots + n = \frac{(k+n)(n-k+1)}{2} = \frac{(n^2 - k^2) + (n+k)}{2} \quad (3)$$

, som for såvidt lett kan bevises om man tenker seg summen som det aritmetiske gjennomsnittet ganget med antall elementer. Vi legger nå merke til at vår S nå kan omskrives til

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{(n^2 - k^2) + (n+k)}{2} \quad (4)$$

Nå gjenstår bare algebra:

$$2S = \sum_{k=1}^n n^2 - \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n n + \sum_{k=1}^n k \quad (5)$$

Siden  $S = \sum_{k=1}^n k^2$ , flytter vi denne over. De resterende summene er enten uavhengige av  $n$  eller består av formler vi allerede kan:

$$3S = n^3 + n^2 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n^3 + 2n^2 + n^2 + n}{2} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2} \quad (6)$$

Nå er vi svært nær den endelige løsningen! Andregradsuttrykket kan faktorerises, og vi deler på tre på begge sider, og vi har følgende pene svar:

$$S = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6} \quad (7)$$

Og beviset er fullført.

### Oppsummering

Hva var det nå som foregikk gjennom dette beviset? Først la vi merke til at problemet vårt kunne tolkes geometrisk, og dette ledet oss til å uttrykke summen vår som en sum av enklere uttrykk. Vi skjønner lett at vi kan generalisere denne metoden til tre dimensjoner, og så videre. Problemet er bare at da blir algebraen mye styggere.