Epsilon-Delta

Fredrik Meyer

16. desember 2008

Sammendrag

Mange blir skremt når de ser de skumle tegnene ϵ og δ. Det er ofte i begynnelsen vanskelig å forstå hvorfor man begynner å blande inn slike tegn når man skal bevise ofte tilsynelatende selvinnlysende setninger innenfor analysen. Men, som jeg skal prøve å forklare - forhåpentligvis bedre enn mange lærebøker -, så gir disse skumle tegnene oss presise definisjoner på ganske abstrakte matematiske resultater.

1 Eksempel fra virkeligheten

Tenk deg at du eier en fabrikk som produserer rette linjer. Dessverre er det i praksis umulig å få linjene helt rette, men om du bruker godt med tid og presisjonsarbeid, så kan du få linjen så rett du bare ønsker. La oss kalle "graden av retthet" for ϵ. Nå skjønner du kanskje tegningen: vi betegner så mengden av presisjonsarbeid for å stille inn utstyret med δ. Din oppgave er altså å finne en δ slik at rettheten blir bedre enn ϵ.

Det er akkurat dette svært mange av $\epsilon - \delta$-operasjonene går ut på. La oss gå over til en skremmende definisjon.

2 Kontiunitet

Definisjon 1. *En funksjon f er kontinuerlig i et punkt $a \in D_f$ dersom følgende gjelder: For enhver $\epsilon > 0$, kan vi finne en $\delta > 0$ slik når $x \in D_f$ og $|x - a| < \delta$, så er $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.*

Denne definisjonen ser garantert skremmende ut. Men la oss trekke fram fabrikkeksemplet. La funksjonen f betegne presisjonen du må arbeide med for å få varen med en feil mindre enn ϵ. La så a være punktet hvor presisjonen er perfekt. Din jobb er altså å få avstanden mellom x og a - det er x du kontrollerer - liten nok til at avstanden mellom $f(x)$ og $f(a)$ er mindre enn ϵ. Sagt mer matematisk, skal du finne en δ, slik at når $|x - a| > \delta$, så er $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Men dette er akkurat hva definisjonen ovenfor sier!

Men la oss se på et mer håndfast eksempel:

Eksempel 1. Vis at $f(x) = 2x + 3$ er kontinuerlig i $a = 1$. Her skal vi selvsagt bruke definisjonen over. Nå råder jeg leseren til å lese nøye gjennom definisjonen én gang til for å fjerne mest mulig tvil. Så påstår jeg at vi er gitt en eller annen $\epsilon > 0$, og vi må nå bestemme $\delta > 0$, slik at "presisjonen" blir bedre enn ϵ.

Vi setter $|x - a| = |x - 1| < \delta$.
Så ser vi på $|f(x) - f(a)| = |2x + 3 - (2 \cdot 1 + 3)| = |2x - 2| = 2|x - 1|$. Men se her! Hva vet vi om størrelsen $|x - 1|$? Jo, vi vet at den er mindre enn δ! Det betyr at:
$|f(x) - f(a)| = 2|x - 1| < 2\delta$.

Så hva kan vi sette δ lik for at $|f(x) - f(a)|$ skal bli mindre enn ϵ? Jo, vi setter $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Da ser vi at når $|x - 1| < \delta$, så er $|f(x) - f(1)| < 2\delta = \epsilon$. Og vi har vist at f er kontinuerlig i 1.

Om ikke dette var forståelig, så tar vi like gjerne med nok et eksempel:

Eksempel 2. Vis at $g(x) = 5x - 1$ er kontinuerlig i $a = 0$. Vi må finne en $\delta > 0$ slik at når $|x - 0| = |x| < \delta$, så er $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, uansett hvilken ϵ vi blir gitt.

Vi skriver opp $|f(x) - f(a)| = |5x - 1 - (-1)| = 5|x|$. Men nå har vi jo at $5|x| < 5\delta$. Så velger vi $\delta = \frac{\epsilon}{5}$, får vi: $5|x| < 5\delta = \epsilon$. Og funksjonen er derfor kontinerlig i 0.

Så langt har eksemplene vært temmelig enkle, og det har vært temmelig lett å finne en ϵ. Men hva om funksjonen er av andre grad? Eller om funksjonen er mer avansert? I ganske få tilfeller lønner det seg å bruke $\epsilon - \delta$-bevis for å bevise kontiunitet, så vi skal senere vise at alle sammensetninger av kontinuerlige funksjoner også er kontinuerlige. Men først til nok et eksempel:

Eksempel 3. Vis at $f(x) = 3x^2 + 1$ er kontinuerlig i $a = 1$. Vi er altså gitt en $\epsilon > 0$, og vi må finne en $\delta > 0$, slik at $|f(x) - f(1)|$ er mindre enn ϵ når $|x - 1| < \delta$.

Vi setter $|x - 1| < \delta$. La oss nå se på funksjonsulikheten:

$$|f(x) - f(1)| = |3x^2 - 3| = 3|x^2 - 1| = 3|x - 1||x + 1|$$

Problemet her er at variabelen er en enkel x, mens funksjonen er en andregradsfunksjon. Det blir lett mye rot, så la oss innføre størrelsen $h = x - 1$. Dette gir oss at $x = h + 1$, og vi ser at uttrykket blir noe enklere:

$$3|x - 1||x + 1| = 3|h||h + 2|$$

Men fremdeles er det vanskelig å si så mye om funksjonen. La oss bestemme oss for at $\delta < 1$. Dette hjelper oss et stykke på vei:

$$3|h|h + 2| < 3 \cdot 3\delta$$

Vi ser nå at hvis vi velger velger $\delta = \min\,[1, \frac{\epsilon}{9}]$, så har vi vist at funksjonen er kontinuerlig i 1. Dette kan synes litt underlig, men om en stor ϵ er valgt, så kan det hende at 1 er et bedre velg som δ.

Nå når vi har sett på noen eksempler på bruk av definisjonen, kan vi filosofere litt over hva den egentlig sier. Forestill deg en diskontinuerlig funksjon. Ta f.eks denne:

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{hvis } x > 0 \\ 0 & \text{hvis } x \leq 0 \end{cases}$$

Den intuitive forståelsen vi har av kontiunitet sier at en graf er kontinuerlig "hvis vi kan tegne den uten å løfte hånden". Og den definisjonen stemmer forsåvidt godt. La oss tenke på definisjon på dette eksemplet. Velger vi et område $|x| < \delta$ rundt $x = 0$, ser vi at det er umulig å få "feilen" noe mindre enn 5, uansett hvilken δ vi velger. Dette viser godt at definisjonen fungerer i praksis.

La oss for ordens skyld ta med definisjonen på diskontinuitet i et punkt:

Definisjon 2. *En funksjon f er diskontinuerlig i et punkt a dersom det finnes en $\epsilon > 0$ slik at uansett hvor liten vi velger $\delta > 0$, så kan vi finne en x slik at $|x - a| < \delta$ og $|f(x) - f(a)| \geq \epsilon$.*

Vi skal ikke gå nærmere inn på definisjonen her.

Som allerede nevnt, bruker man vanligvis ikke $\epsilon - \delta$-bevis for å vise kontuinitet på større funksjoner. Det viser seg at hvis vi har to (eller flere!) funksjoner f og g som er kontinuerlige, så er også $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, og f/g kontinuerlige. Jeg skal vise den enkleste av disse resultatene ($f + g$).

Bevis. Vi antar at f og g er kontinuerlige i a. Vi skal vise at da er også $f + g$ kontinuerlig i a. Vi må med andre ord, gitt en $\epsilon > 0$, finne en $\delta > 0$ slik at når $|x - a| < \delta$, så er $|(f + g)(x) - (f + g)(a)| < \epsilon$.

Jeg minner om trekantulikheten:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Vi har så at:

$$|(f+g)(x) - (f+g)(a)| = |f(x) - f(a) + g(x) - g(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)|$$

Siden f er kontinuerlig i a, finnes det en δ_1 slik at $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ når $|x - a| < \delta_1$. Siden g er kontinuerlig i a, finnes det en δ_2 slik at $|g(x) - g(a)| < \epsilon$ når $|x - a| < \delta_2$. Vi kan derfor velge $\delta = \min[\delta_1, \delta_2]$, og vi får at:

$$|(f + g)(x) - (f + g)(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Og beviset er fullført. □

Til slutt om kontinuitet skal jeg bevise at en funksjon sammensatt av flere funksjoner, også er kontinuerlig i et gitt punkt. Å forstå bevisene når man lærer matematikk hjelper ikke bare på forståelsen, men det gjør også faget mye morsommere. Dette beviset finner man ofte igjen i lærebøker i Kalkulus, men disse er ofte kortfattede og ikke så veldig lett å forstå seg på. Jeg skal prøve å utdype hvert steg, og forhåpentligvis vil dette gjøre det enklere å forstå.

Teorem 1. Anta at g er kontinuerlig i a og f i punktet $g(a)$. Da er den sammensatte funksjonen $h(x) = f[g(x)]$ også kontinuerlig i a.

Bevis. Vi kan bli gitt en hvilken som helst $\epsilon > 0$. Så, gitt en $\epsilon > 0$, må vi finne en $\delta > 0$ slik at når $|x - a| < \delta$ og $x \in D_h$, så er $|f[g(x)] - f[g(a)]| < \epsilon$. Så langt er alt etter definisjonen og i tråd med det vi har gjort tidligere.

I bevis gjelder det å bruke de opplysningene vi har: Vi vet også at siden g er kontinuerlig i a, så eksisterer det et tall $\delta > 0$, gitt en $\gamma > 0$, slik at når $|x - a| < \delta$, så er $|g(x) - g(a)| < \gamma$.

Siden f er kontinuerlig i $g(a)$, vet vi at det finnes et tall $\gamma > 0$ slik at når $|u - g(a)| < \gamma$, så er $|f(u) - f[g(a)]| < \epsilon$.

Legg merke til at γ går igjen både når vi snakker om g og når vi snakker om f. Dette er hele trikset i beviset. For nå ser vi at når $|x - a| < \delta$, så er $|g(x) - g(a)| < \gamma$. Men dette medfører jo at $|f[g(x)] - f[g(a)]| < \epsilon$.

Og beviset er fullført. □

3 Grenseverdier

Som vi skal se, er det en nær sammenheng mellom definisjonen på grenseverdier og kontinuitet. Men hva er egentlig en **grense**verdi? Når man regner grenseverdier, så regner man ut funksjonsverdien i nærheten av et punkt, og **ikke** i punktet. Man regner altså ut hva funksjonsverdien ville vært i det aktuelle punktet, om funksjonen oppfører seg på en noenlunde normal måte.

La oss ta et eksempel. Vi definerer f:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{hvis } x \neq 0 \\ 5 & \text{hvis } x = 0 \end{cases}$$

Denne funksjonen har funksjonsverdi 5 når $x = 0$, men grenseverdien er noe annet. Vi sier at funksjonen går mot -1 når $x \to 0$. Dette gir oss grunnlaget for definisjonen av grenseverdier:

Definisjon 3. *Anta at f er definert i nærheten av a. Vi sier at f nærmer seg b som grenseverdi dersom følgende gjelder. For enhver $\epsilon > 0$, kan vi finne en $\delta > 0$ slik at når $|x - a| < \delta$, så er $0 < |f(x) - b| < \epsilon$. Med symboler skriver vi*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

Hva om ϵ var gitt? Hvordan ville ting tatt seg ut da?

Eksempel 4. Definér $g(x) = 5x$. Vi ser lett at $g(5) = 25$. Men nå antar vi at denne likningen har dukket opp på en fabrikk! Det er umulig å produsere en x slik at $g(x) = 25$, men vi kan med nøye arbeid komme vilkårlig nær $x = 5$. Finn en $\delta > 0$ slik at feilen hos fabrikken blir mindre enn 0.1.

Så hvilke størrelser er det vi har kontroll på her? Jo, det er kun x. Vi må finne en δ slik at $|x - 5| < \delta$ fører til at $0 < |5x - 25| < 0.1$. Vi ser lett at $0 < 5|x - 5| < 0.1$. Og enda lettere ser vi at vi kan velge $\delta = \frac{0.1}{5}$. Med andre ord: holder vi oss innen en avstand på 0.02 fra $x = 5$, så holder vi oss innenfor den tillate feilen.

Dette arbeidet minner mistenkelig om definisjonen av kontinuitet. Sammenligner vi de to definisjonene kan vi trekke følgende konklusjon:

Observasjon 1. En funksjon f er kontinuerlig i a hvis og bare hvis

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$