

Oblig 2

Fredrik Meyer

9. desember 2008

1 Oppgave 1

a) Vi vet at den deriverte er definert som

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Det er derfor naturlig å tilnærme den deriverte som

$$f'(x) \approx \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

I dette tilfellet kan vi altså finne objektets akselerasjon ved følgende formel:

$$a(t) = v'(t) \approx \frac{v_{i+1} - v_i}{t_{i+1} - t_i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h}$$

for $i = 0, 1, 2, 3, \dots, N - 1$

b) Vi har at $\int v(t)dt = y(t)$, og også $y(0) = a$. Dette kan tilnærmes med trapesmetoden, som kort kan skrives slik (gitt v og a):

```
y[0] = a;  
W[0] = 0;  
for i = 1,2,3,...,N-1  
    W[i] = W[i-1]+v[i]  
I = h(0.5(v[0]+v[N])+W[N-1])+y[0]
```

Vi har nå endt opp med en tilnærming til høyden, gitt at farten er negativ. Jeg kan forklare hva jeg prøver å gjøre i denne kodesnutten. Først setter jeg startposisjonen lik a . Så legger jeg sammen alle verdiene av v_i vi har. Disse legges i en liste, og den endelige summen er $W[N - 1]$. Deretter bruker jeg formelen fra boken som går under navnet trapesmetoden:

$$I \approx \frac{h}{2}(v_0 + v_N + \sum_{i=0}^N v_i)$$

...som er en tilnærming til integralet. En utledning av denne formelen gir jeg i oppgave 2a. Til slutt legger jeg til $y[0]$, som er startverdien.

2 Oppgave 2

a) Vi har en funksjon. Vi skal tilnærme integralet i intervallet $[a, b]$. Dette intervallet kan vi dele opp i 2^n deler. Hver del har da en bredde på $h = \frac{b-a}{2^n}$. Arealet av én blokk kan tilnærmes ved formelen for et trapes:

$$A \approx \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} h$$

Hvor x_{i-1} er største nedre skranke i intervallet, mens x_i er minste øvre skranke i intervallet. Skal vi summere alle intervallene får vi:

$$I_n \approx \sum_{i=1}^{2^n} h \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

Det kan forenkles for å unngå å gjøre samme beregning flere ganger. Vi legger merke til at $\frac{h}{2}$ ikke inngår i hver summering:

$$I_n \approx \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{2^n} (f(x_{i-1}) + f(x_i))$$

Så ser vi at nå beregnes samme f-verdi for hver summasjon. Vi ser at uttrykket kan forenkles til

$$\begin{aligned} I_n &\approx \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{2^{n-1}} f(x_i)) \\ &= h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{2^{n-1}} f(a + ih) \right) \end{aligned}$$

Og dermed har vi vist den såkalte trapesregelen.

b) Helt selvsagt ser vi at $f(a)$ og $f(b)$ brukes i både I_n og I_{n-1} (gitt $n - 1 \geq 0$). Etter litt ettertanke ser vi også at alle verdier i følgen $(f(a + ih))_{i=1}^{2^{n-1}-1}$ inngår i både I_n og I_{n-1} . Hvorfor så? Jo, for hver n deler vi intervallet $[a, b]$ opp i to nye deler:

```
|-----| n = 0
|-----|-----| n = 1
|-----|-----|-----|-----| n = 2
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--| n = 3
```

... osv

Som vi ser av illustrasjonen over, inngår halvparten av x-verdiene i rad $n - 1$ blant x-verdiene i rad n. Vi ser også at dette gjelder generelt. Dette er grunnen til at følgen $(f(a + ih))_{i=1}^{2^{n-1}-1}$ inngår i både I_n og I_{n-1} .

c) Vi skal forklare hvorfor

$$I_n = \frac{I_{n-1}}{2} + h \sum_{i=1}^{2^{n-1}} f(a + (2i-1)h) \quad (1)$$

Setter vi (1) inn i (2) (altså den to som står i oppgaveteksten), får vi: (husk at $h = \frac{b-a}{2^n}$)

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2 \frac{b-a}{2^n} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{2^{n-1}} f\left(a + 2i \frac{b-a}{2^n}\right) \right)}{2} + \frac{b-a}{2^n} \sum_{i=1}^{2^{n-1}} f(a + (2i-1)h) \\ &= \frac{b-a}{2} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{2^{n-1}-1} f\left(a + 2i \frac{b-a}{2^n}\right) + \sum_{i=1}^{2^{n-1}} f\left(a + (2i-1) \frac{b-a}{2^n}\right) \right) \end{aligned}$$

Nå ser vi at det gjenstår å forklare at

$$\sum_{i=1}^{2^{n-1}-1} f\left(a + 2i \frac{b-a}{2^n}\right) + \sum_{i=1}^{2^{n-1}} f\left(a + (2i-1) \frac{b-a}{2^n}\right) = \sum_{i=1}^{2^n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{2^n}\right)$$

Vi ser at første ledd legger sammen $2^{n-1} - 1$ forskjellige verdier av f . Legg merke til at den hopper over annenhver $h = \frac{b-a}{2^n}$. (mer spesifikt hver h med en odde koeffisient). Neste ledd er likt, men legger sammen 2^{n-1} forskjellige verdier av f , men kun odde koeffisienter av h . Til sammen gir dette $2^{n-1} - 1 + 2^{n-1} = 2^n - 1$ f -verdier for i mellom 1 og $2^n - 1$. Og vi har formelen på høyresiden. (hvorfor dette er de samme f -verdiene, er forklart i b)

d) Python-programmet ligger vedlagt på eget ark.

3 Oppgave 3

a)

$$x' - x^2 = 1, \quad x(0) = 1 \quad (2)$$

Vi har (2). Vi flytter litt:

$$\begin{aligned} x' &= 1 + x^2 \\ \frac{x'}{1+x^2} &= 1 \end{aligned}$$

Nå er ligningen på formen $q(x)x' = p(y)$. I dette spesifikke tilfellet er $p(y) = 1$ for alle y . Vi integrerer med hensyn på t på høyre- og venstresiden hver for seg:

$$\int \frac{x'(t)}{1+x^2(t)} dt = \arctan x(t) + C_1$$

$$\int 1 dt = t + C_2$$

Disse er like:

$$\arctan x(t) + C_1 = t + C_2$$

$$\arctan x(t) = t + C$$

$$x(t) = \tan(t + C)$$

Vi må nå finne C:

$$x(0) = 1 = \tan C \Rightarrow C = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Altså:

$$x(t) = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

b,c,d) Plottene til b, c og d er vedlagt. Under er de forskjellige verdiene de forskjellige metodene genererte. Ser vi på grafen, er det noe uklart om den alternative metoden eller Eulers midtpunktmetode fungerer best. Av plottet ser det ut til at den alternative metoden treffer bedre i hvert punkt, mens Eulers midtpunktmetode gir et bedre overslag som en rett linje. Men skal jeg konkludere med noe, vil jeg påstå den alternative metoden er hakket bedre, spesielt om vi øker antall tilnærminger.

Koden til programmet jeg skrev for å få fram disse verdiene er også vedlagt.

Eulers method		Eulers midpoint method	
t	x(t)	t	x(t)
0	1	0	1
0.1	1.2	0.1	1.221
0.2	1.444	0.2	1.50136
0.3	1.75251	0.3	1.87547
0.4	2.15964	0.4	2.40771
0.5	2.72605	0.5	3.23182
0.6	3.56919	0.6	4.66654

Alternative method		tan(0.25*pi+x)	
t	x(t)	t	x(t)
0	1	0	1
0.1	1.22361	0.1	1.22305
0.2	1.51049	0.2	1.5085
0.3	1.90154	0.3	1.89577
0.4	2.48191	0.4	2.46496
0.5	3.4665	0.5	3.40822
0.6	5.63947	0.6	5.33186

For oversiktighetens skyld inkluderer jeg den alternative metoden:

$$x_{k+1} = \frac{2 - hx_k - 2\sqrt{1 - h^2 - 2x_k h}}{h}$$

Så hvilke begrensninger kan det være på h? Øyeblikket slår det an at følgende må gjelde: $1 - h^2 - 2x_k h \geq 0$. Dette kan vi gjenkjenne som en annengradsligning: $h^2 + 2x_k h - 1 \leq 0$. Vi løser for h:

$$h = \frac{-2x_k \pm \sqrt{4x_k^2 + 4}}{2} = -x_k \pm \sqrt{x_k^2 + 1}$$

Dette betyr at ulikheten kan skrives som:

$$(h + x_k - \sqrt{x_k^2 + 1})(h + x_k + \sqrt{x_k^2 + 1}) \leq 0$$

Vi legger merke til at parentesene til høyre aldri kan bli negativ, og følgelig må parentesen til venstre være under eller lik null for at ulikheten skal bli oppfylt:

$$h \leq \sqrt{x_k^2 + 1} - x_k$$

Dette sier oss at for jo høyere x_k -verdier vi arbeider med, kan vi tillate oss å sette h høyere om vi skulle ønske det. Siden vi vet av differensligningen at $x(t)$ er økende for alle x , vet vi også at initialverdien sier oss noe mer om h . $x(t)$ er altså aldri lavere enn 1. Dermed må h oppfylle:

$$h \leq \sqrt{2} - 1 \approx 0.4142\dots$$

h er selvfølgelig også positiv og $\neq 0$.

e) Her må jeg dessverre melde pass.